Midtoets

1. Waar is de functie $f(z) = \sin(y)\cos(x) + i\cos(y)\sin(x)$ met $z = x + iy$ differentieerbaar?

   Oplossing: Gebruik Cauchy-Riemann vergelijkingen:
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ en } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
   voor $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ met $u, v \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
   Alternatief: f differentieerbaar als $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ van de vorm
$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$
   Eerst identificeren we u en v voor gegeven functie:
$$u(x,y) = \sin(y)\cos(x) \text{ en } v(x,y) = \cos(y)\sin(x).$$
   De afgeleiden van u en v worden gegeven door
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} -\sin(y)\sin(x) & \cos(y)\cos(x) \\ \cos(y)\cos(x) & -\sin(y)\sin(x) \end{pmatrix}.$$
   Er wordt niet aan Cauchy-Riemann voldaan voor alle $x, y \in \mathbb{R}$, maar wel waar geldt dat
$$\cos(y)\cos(x) = -\cos(y)\cos(x)$$
   Oftwel waar
$$\cos(y) = 0 \text{ en } x \in \mathbb{R} \text{ of } \cos(x) = 0 \text{ en } y \in \mathbb{R}.$$
   Dit leidt tot de volgende punten in het complexe vlak waar f differentieerbaar is:
$$\{x + iy \in \mathcal{C} \mid y = \tfrac{1}{2}\pi + k\pi \text{ en } x \in \mathbb{R} \text{ of } x = \tfrac{1}{2}\pi + k\pi \text{ en } y \in \mathbb{R} \text{ (hier } k \in \mathbb{Z})\}.$$

2. Bepaal de afgeleide van de hoofdtak (principal branch) van z^{2+3i} in $z = i$.
   Oplossing: Definitie van hoofdtak van z^α met $z, \alpha \in \mathbb{C}$:
$$z^\alpha = e^{\alpha \mathrm{Log}(z)} = e^{\alpha(\log|z| + i\mathrm{Arg}(z))}.$$
   Hier nemen we aan dat Log de hoofdtak is van log met de niet-positieve reële as als snede (branch cut) . De afgeleide van z^{2+3i}:
$$\frac{d}{dz} z^{2+3i} = \frac{d}{dz} e^{(2+3i)\mathrm{Log}(z)} = (2+3i)e^{(2+3i)\mathrm{Log}(z)} \frac{1}{z}.$$
   Dit kan vereenvoudigd worden tot $(2+3i)z^{1+3i}$ zolang dezelfde tak wordt gebruikt als voor z^{2+3i}. Invullen van $z = i$:
$$(2+3i)e^{(2+3i)\mathrm{Log}(z)} \frac{1}{z}\bigg|_{z=i} = (2i - 3)e^{-3\pi/2}$$

3. Gegeven
$$I = \int_\Gamma (z-1)^{-1} dz,$$
   waarbij de halve cirkel Γ wordt geparametriseerd door $z(t) = 1 + re^{it}$ met $0 \le t \le \pi$:

a. Bepaal een bovengrens voor de modulus van I.
Oplossing: Modulus van I afschatten met lengte van contour vermenigvuldigd met het maximum van $|(z-1)^{-1}| = 1/r$ op de contour:

$$|I| = \pi r \cdot \frac{1}{r} = \pi.$$

b. Bepaal I.
Oplossing:

$$I = \mathrm{Log}(z-1)|_{1+r}^{1-r} = \log|r| + i\pi - \log|r| = i\pi,$$

waarbij de snede voor de tak Log een rechte lijn vanuit 1 moet zijn die niet snijdt met Γ.
Alternatief: Def. van contourintegraal:

$$I = \int_0^\pi \frac{1}{z(t)-1} z'(t) dt$$

Dus in dit geval:

$$I = \int_0^\pi \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = \int_0^\pi idt = i\pi$$

4. Bepaal met behulp van de Cauchy integraalstelling

$$\int_\Gamma \frac{e^{2z}}{z^2-1} dz,$$

waarbij Γ de eenmaal in positieve zin (tegen de klok in) doorlopen cirkel $|z-1| = 1$ is.
Oplossing: Cauchy integraalstelling:

$$2\pi i f(z_0) = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

met f analytisch binnen de enkelvoudig gesloten contour Γ rond z_0 die in positieve richting doorlopen wordt.
Om de gegeven integraal van deze vorm te maken moeten we eerst de noemer factoriseren:

$$z^2 - 1 = (z+1)(z-1).$$

Dan volgt dat $f(z) = e^{2z}/(z+1)$ voor de Cauchy integraalstelling (de contour bevat alleen de pool $z = 1$). Dus na invullen krijgen we:

$$\int_\Gamma \frac{e^{2z}}{z^2-1} dz = \pi i e^2.$$